Jurnal Perspektif
Vol. 8 No. 2 Juli-November 2024
Page 275-290

Struktur dan Cara Berpikir Matematika melalui *Framework Connections, Recognition Patern, Identifying Similarities and Differences and Generalising* (CRIG)

Iyon Maryono[1], Hamdan Sugilar[2], Ade Hilda Zainy Aditya[3]

[1,2]Prodi Pendidikan Matematika, UIN Sunan Gunung Djati Bandung
Jl. Soekarno Hatta Gedebage, Kota Bandung, Indonesia
[2]Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia
Jl. Setiabudhi No.229, Kota Bandung, Indonesia
[3]MTs Assasul Islamiyah Cikembar Sukabumi
Jl. Cagak Cibatu Cikembar Kabupaten Sukabumi Jawa Barat Indonesia

hamdansugilar@uinsgd.ac.id

Received: 11 Juli 2024 ; Accepted: 26 Oktober 2024 ; Published: 07 November 2024

DOI: http://dx.doi.org/10.15575/jp.v8i2.296

Abstrak

Matematika dalam perspektif keterkaitan antar konsep atau materi dapat disebut sebagai ilmu tentang berpikir terstruktur dan sistematis. Tujuan penelitian ini untuk mengkaji strukur matematika dan berpikir matematik, salah satunya melalui *framework* CRIG. Metode penelitian ini adalah *library research* mengkaji tentang strukur matematika dan struktur berpikir matematik dan pengenalan tentang *framework Connections, Recognition Patern, Identifying Similarities and Differences and Generalising* (CRIG). Hasil penelitian menunjukkan bahwa struktur matematika lebih berfokus pada aspek formal dan sistematis matematika, sedangkan struktur berpikir matematik berhubungan dengan proses mental dan kognitif yang digunakan individu dalam memahami dan menerapkan matematika. Untuk memahami struktur berpikir matematika, salah satu syaratnya memahami tentang struktur matematika dan yang utama adalah memahami materi pra syarat sebagai *prior knowledge*. Oleh karena itu, CRIG menjadi salah satu upaya untuk memahami struktur berpikir matematika, hal ini sebagai teknik untuk memahami matematika yang terstruktur dan sistematis.

Kata Kunci: Cara Berpikir Matematik, CRIG, Struktur Matematika, *Way of Thinking, Way of Understanding*

Abstract

Mathematics in the perspective of the relationship between concepts or materials can be called the science of structured and systematic thinking. The purpose of this study is to examine the structure of mathematics and mathematical thinking, one of which is through the CRIG framework. This research method is library research examining the structure of mathematics and the structure of mathematical thinking and an introduction to the Framework Connections, Recognition Pattern, Identifying Similarities and Differences and Generalising (CRIG). The results of the study show that the structure of mathematics focuses more on the formal and systematic aspects of mathematics, while the structure

of mathematical thinking is related to the mental and cognitive processes used by individuals in understanding and applying mathematics. To understand the structure of mathematical thinking, one of the requirements is to understand the structure of mathematics and the main thing is to understand the prerequisite material as prior knowledge. Therefore, CRIG is one of the efforts to understand the structure of mathematical thinking, this is a technique for understanding structured and systematic mathematics.
Keywords: Mathematical Thinking, CRIG, Mathematical Structure, Way of Thinking, Way of Understanding

A. Pendahuluan

Pemikiran struktural membantu menjembatani jurang pemisah antara pendekatan konseptual dan prosedural dalam pengajaran dan pembelajaran matematika (Mason et al., 2009). Struktur matematika merupakan pusat keterkaitan hubungan numerik, spasial atau logis, namun tidak diketahui seberapa baik guru memahami konsep ini atau menerapkannya dalam praktik pedagogi (Gronow et al., 2022). Keterampilan berpikir struktural harus dikembangkan sebagai prasyarat agar mahasiswa atau siswa sebagai generasi masa depan memahami tentang struktur matematika, yang dampaknya diperlukan untuk mengembangkan keterampilan berpikir struktural siswa. Mark Gronow menyelidiki bagaimana calon guru menggunakan struktur matematika dan mendorong struktural pemikiran melalui komponen struktur matematika: keterhubungan, mengenali pola, mengidentifikasi persamaan dan perbedaan, dan generalisasi dan penalaran. Keempat komponen tersebut dikenal dengan kerangka pedagogi CRIG struktur matematika yang dikembangkan (Gronow et al., 2020). Fakta yang ada banyak siswa lulus dari program matematika K-12 tanpa pengetahuan matematika konseptual yang fleksibel (Richland et al., 2012).

Menurut (Stacey, 2006) berpikir matematis merupakan hal penting untuk belajar matematika dan cara yang sangat bagus bagi guru untuk membelajarkan matematika. Salah satu faktor yang mempengaruhi kesalahan penyelesaian masalah matematika yang dilakukan oleh siswa adalah struktur berpikir yang dimiliki (Sukmaangara & Pabrawati, 2019), selain itu menurut (Subanji, 2016) bahwa dalam struktur berpikir siswa, kesalahan konstruksi konsep dan penyelesaian masalah matematika yang ditinjau berdasarkan koneksi skema-skema, kesalahn kontruksi tersebut meliputi *pseudo* konstruksi, lubang konstruksi, kesalahan berpikir logis, dan kesalahan berpikir analogi. Dalam menyelesaikan masalah matematika struktur proses berpikir kritis siswa tidak berurutan yang sesuai dengan tahapan yang ada dalam beberapa teori,namun, hal tersebut tidak bertentangan (Baidawi, et al., 2023).

Salah satu solusi yang yang tepat dalam menyelesaikan masalah matematika, dengan melakukan defragmentasi struktur berpikir siswa (S. Netti et al., 2016). Kesalahan dalam pemecahan masalah mengindikasikan adanya bagian-bagian struktur kognitif yang bermasalah, baik karena tidak terorganisir, terputus atau mengalami lubang kognitif (Wahab et al., 2022). Hal tersebut perlu diselesaikan dengan baik, guru harus memahami pemahaman yang dimiliki siswa, sehingga upaya memperbaiki dan refleksi dalam pembelajaran akan tertangani dengan baik, struktur berpikir yang dimiliki siswa dibutuhkan untuk mampu menyelesaikan masalah dengan langkah-langkah yang tepat. Kumalasari (2016) dalam defragmenting struktur berpikir yang dilakukan menggunakan dua langkah, yaitu (1) identifikasi kesalahan berpikir dan (2) menata ulang pikiran yang salah menjadi benar. Pada penelitian ini akan dikaji tentang struktur matematika, struktur berpikir matematik, WoT dan WoU dan *framework* (*Connections, Recognising patterns, Identifying similarities and differences, and Generalising and reasoning*) atau disingkat CRIG.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan metode *research library* mengkaji tentang struktur matematika dari aspek substansi matematika dan proses berpikir matematika. Langkah-langkah *research library* berupa telaah artikel dan kajian tentang keterbatasan siswa atau mahasiswa dalam memahami dan mampu memecahkan masalah matematik. Dalam jenis penelitian ini, peneliti lebih mengandalkan informasi tertulis yang sudah ada. Proses penelitian ini melibatkan pencarian dan pemilihan sumber yang relevan, membaca dan menganalisis konten, serta menyusun hasil analisis dalam bentuk laporan atau tulisan akademis. Fokus penelitian ini adalah mengkaji tentang struktur dan berpikir matematika, WoT dan WoU. Alasan mengkaji materi ini karena memahami struktur matematika dengan baik, akan membuka jalan untuk mempelajari materi matematika dengan lancar dan bermakna, mengingat seringkali mengetahui matematika ilmu terstruktur namun, informasi tentang hal tersebut masih terbatas. Struktur matematika terkait dengan koneksi antar materi matematika, sedangkan struktur berpikir lebih kepada upaya dalam tahapan berpikir untuk memahami materi matematika.

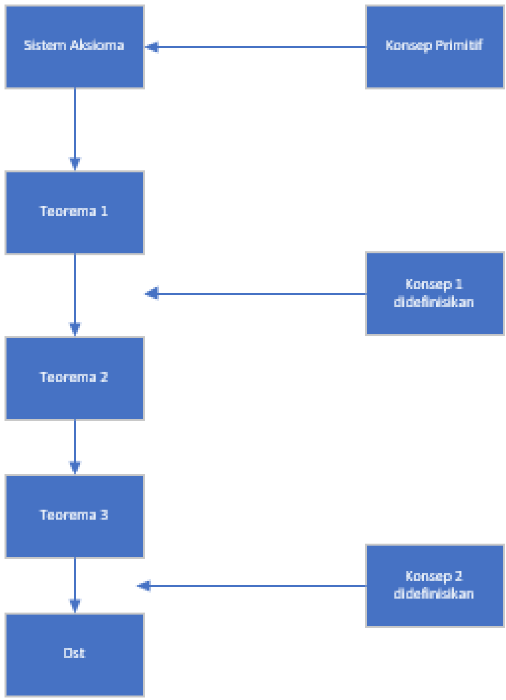
C. Hasil dan Pembahasan

1. Struktur Matematika

Struktur matematika merujuk pada serangkaian operasi atau hubungan yang terdefinisi dengan baik yang memenuhi sifat-sifat tertentu, yang memungkinkan studi terhadap berbagai objek matematika dan interkoneksinya (Dvureěenskij, 2002). Pemahaman terhadap matematika yang baik akan berdampak kepada rasa ingin tahu dan kesadaran belajar yang tinggi (Hwang et al., 2007). Hal ini akan membantu untuk menyelesaikan masalah tingkat tinggi dan mengembangkan bakat matematika. Implikasi secara tidak langsungnya, siswa akan siap menghadapi masalah, menganalisis sampai pada memecahkan masalah kompleks sendiri tanpa banyak intervensi atau bantuan. Diantara kompetensi yang paling diinginkan dalam program pendidikan yang disebutkan oleh siswa adalah berpikir kritis dan kreatif, kewirausahaan inovatif, pemecahan masalah dan adaptasi terhadap kesulitan (Ramírez-Montoya et al., 2021).

Pemecahan masalah pada matematika berarti menyelesaikan masalah matematika. Pemecahan masalah dapat dipandang sebagai strategi pembelajaran atau kemampuan. Kemampuan pemecahan masalah adalah keterampilan yang diperoleh dan dapat dipelajari (Walker, 2021). Untuk mampu memecahkan masalah, diperlukan pemahaman struktur matematika yang baik, sehingga untuk mampu mempelajari matermatika tingkat lanjut, harus memahami dengan baik materi sebelumnya. Selanjutnya Bucklin menyatakan bahwa, lebih banyak upaya diperlukan untuk meningkatkan inovasi dan menggabungkan strategi pendidikan media aktif berbasis bukti, terutama untuk mendorong keterlibatan siswa, pemikiran kritis, dan keterampilan pemecahan masalah (Bucklin et al., 2021). Pendekatan pengajaran yang fleksibel sangat penting untuk meningkatkan keberhasilan siswa (Wynants & Dennis, 2018).

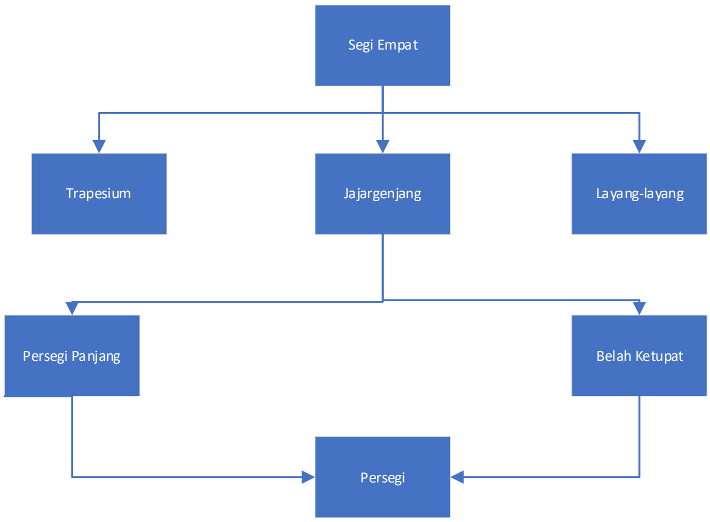
Struktur dalam matematika tersusun secara hierarkis (terbatas), logis, dan sistematis mulai dari yang paling sederhana sampai pada konsep yang paling kompleks. Dengan kata lain, struktur-struktur dalam matematika dimulai dari unsur-unsur atau istilah-istilah yang tidak didefinisikan (unsur-unsur primitif) kemudian dibuat definisi-definisi mengenai unsur-unsur atau istilah-istilah itu. Dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan dan unsur-unsur yang didefinisikan dapat dibuat asumsi-asumsi yang disebut aksioma atau postulat. Matematika merupakan ilmu terstruktur yang terorganisasikan, hal ini karena matematika dimulai dari unsur yang tidak didefinisikan, kemudian unsur yang didefinisikan ke aksioma / postulat dan akhirnya pada teorema seperti pada gambar 1, pada konsep-konsep matematika tersusun secara hierarkis, terstruktur, logis, dan sistematis mulai dari konsep yang paling sederhana sampai pada konsep yang paling kompleks (Susanah, 2014). Oleh karena itu, untuk mempelajari matematika, konsep sebelumnya yang menjadi prasyarat, harus benar-benar dikuasai agar dapat memahami topik atau konsep selanjutnya. Struktur dalam matematika memiliki hierarki tersendiri, misalnya pada materi fungsi tentu harus dipahami dulu tentang himpunan dan operasi-operasinya, begitupun pada materi geometri diperlukan pra syarat untuk mengenal bidang datar dan sifat-sifatnya sebelum mempelajari bangun ruang.



Gambar 1. Struktur Matematika

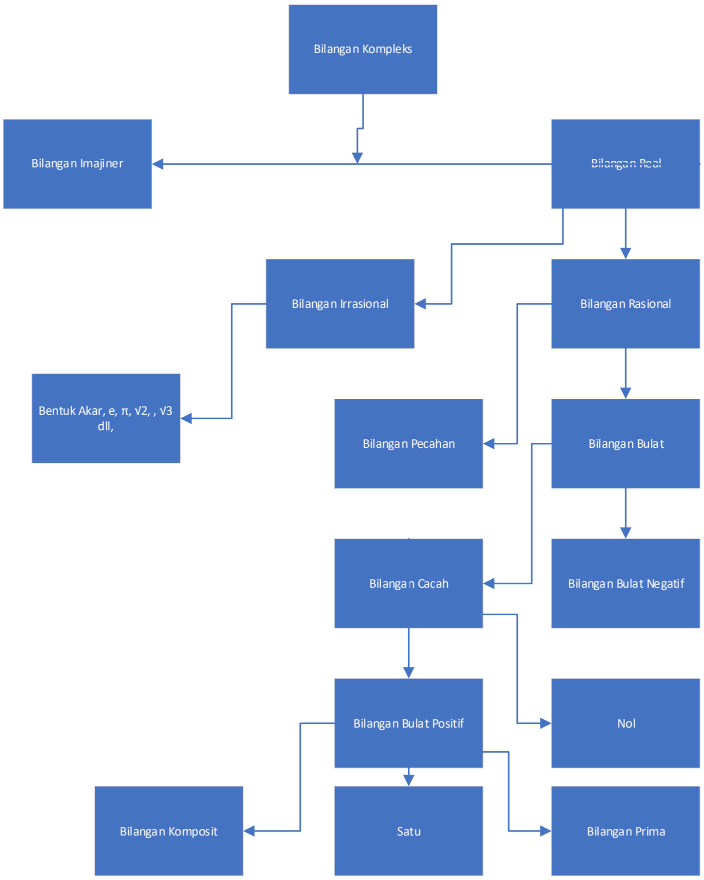
Kilpatrick & Swafford, (2002) mendefinisikan kecakapan matematika sebagai konsep multifase yang mencakup beberapa bagian yang saling terkait yang penting untuk pemahaman dan penerapan matematika yang efektif. Mereka mengidentifikasi lima bagian utama kecakapan matematika yaitu pemahaman konseptual: bagian ini menekankan pentingnya memahami konsep, operasi, dan hubungan matematika. Ini melibatkan pemahaman prinsip-prinsip yang mendasarinya dan mampu menghubungkan berbagai ide matematika. Kelancaran prosedural: Ini mengacu pada kemampuan untuk melaksanakan prosedur matematika secara akurat dan efisien. Ini mencakup keterampilan seperti melakukan perhitungan dan memecahkan persamaan, serta mengetahui kapan dan bagaimana menerapkan prosedur ini. Pendidikan matematika yang mengandalkan siswa untuk mengikuti prosedur atau seperangkat aturan tertentu tanpa pemikiran logis atau kemampuan menjelaskan dan membenarkan suatu solusi akan mengakibatkan siswa kurang memahami matematika secara keseluruhan.

Dalam kelancaran prosedural, siswa dapat dengan cepat mengajukan solusi lengkap yang mengarah ke jawaban yang benar. Namun, mereka gagal untuk memberikan dua atau lebih solusi dalam memecahkan masalah terbuka (Andal & Andrade, 2022). Hasil juga menunjukkan bahwa siswa dapat dengan jelas menjelaskan masalah tetapi berjuang untuk membenarkan solusi mereka. Selain itu, kelancaran prosedural berkorelasi positif dengan penalaran adaptif mereka. Akibatnya, siswa dengan tingkat prestasi matematika rata-rata mendapat skor yang jauh lebih tinggi daripada siswa dengan tingkat matematika rendah dalam hal fleksibilitas. Implikasi pedagogis menunjukkan bahwa kegiatan pemecahan masalah bagi siswa seharusnya tidak hanya berfokus pada mendapatkan prosedur dan jawaban yang benar. Selanjutnya, direkomendasikan bahwa guru harus mengekspos siswa dalam masalah terbuka dan memungkinkan mereka untuk mencoba dan membenarkan solusi unik mereka sendiri terlepas dari prestasi matematika mereka. Seperti nampak pada gambar 2 tentang struktur matematika dalam mempelajari segi empat terdiri dari trapesium, jajar genjang, dan layang-layang. Untuk mempelajari persegi panjang dan belah ketupa tentu harus memahami tentang sifa-sifat jajar genjang, sifat yang dimiliki persegi panjang dan belah ketupat ada pada sifat pada persegi.



Gambar 2. Struktur Segi Empat

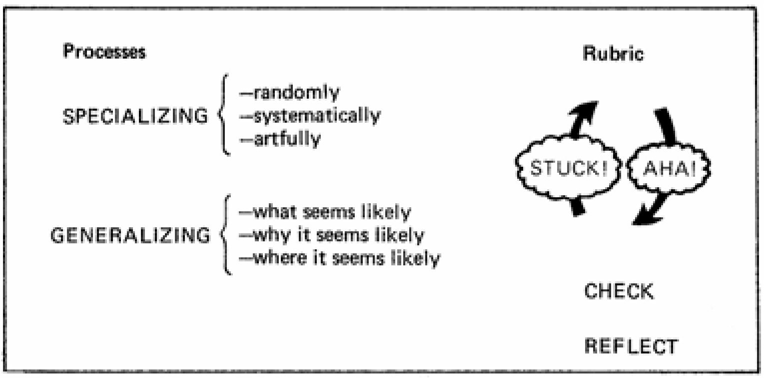
Struktur dalam matematika tidak hanya berkaitan dengan objek-objek matematika, tetapi juga dengan hubungan antara objek-objek tersebut. Misalnya, dalam sebuah himpunan, struktur dapat membantu kita memahami bagaimana elemen-elemen di dalamnya berinteraksi dan berhubungan satu sama lain (Senechal, 1993).



Gambar 3. Struktur Bilangan

2. Struktur Berpikir Matematis

Berpikir secara Matematis adalah tentang proses matematika, dan bukan tentang cabang matematika tertentu. Tujuan kami adalah untuk menunjukkan cara memulai pertanyaan apa pun, cara menjawabnya secara efektif, dan cara belajar dari pengalaman (Mason, J., Burton, L., & Stacey, 2010). Menurut John Mason, berpikir matematis adalah proses berpikir yang melibatkan kemampuan untuk mengenali pola, menggeneralisasi, dan membuat prediksi berdasarkan pola tersebut. Mason menekankan pentingnya proses berpikir dalam memahami dan memecahkan masalah matematika, bukan hanya menghafal prosedur atau rumus. Berpikir matematis juga mencakup kemampuan untuk berpikir secara logis, membangun argumen yang konsisten, serta menggunakan representasi matematika (seperti diagram, simbol, dan model) untuk mengeksplorasi dan menyelesaikan masalah. Mason percaya bahwa melalui berpikir matematis, seseorang dapat mengembangkan pemahaman yang lebih dalam tentang konsep-konsep matematika dan aplikasinya dalam berbagai situasi. Tahapan berpikir menurut (Mason, 2003).



Gambar 4. Tahapan Berpikir Matematis Menurut John Mason

Mason menjelaskan bahwa dalam berpikir matematis harus melalui empat proses, yaitu

a. Specializing (pengkhususan) proses di mana seseorang memfokuskan diri pada contoh-contoh spesifik dari masalah yang diberikan. Dengan bekerja melalui contoh-contoh khusus, seseorang dapat memperoleh wawasan awal tentang struktur masalah dan mencari pola atau sifat umum yang berlaku. Proses ini juga melibatkan pengujian hipotesis dalam konteks yang lebih terbatas sebelum menerapkannya secara lebih luas.
b. Generalizing (Generalisasi) Setelah memahami masalah melalui spesialisasi, langkah selanjutnya adalah melihat pola atau sifat yang muncul dan menggeneralisasikannya. Generalisasi adalah proses mengembangkan prinsip atau konsep yang lebih umum dari hasil yang diperoleh melalui contoh spesifik. Ini membantu dalam membentuk pemahaman yang lebih mendalam dan memungkinkan penerapan konsep tersebut pada berbagai situasi.
c. Conjecturing (Berhipotesis) adalah proses membuat prediksi atau asumsi tentang hasil atau sifat tertentu berdasarkan pengamatan awal. Ini sering kali muncul dari spesialisasi dan generalisasi, di mana seseorang merumuskan dugaan yang dapat diuji lebih lanjut. Hipotesis ini kemudian dapat digunakan untuk mengeksplorasi solusi potensial atau untuk mengarahkan proses pemecahan masalah.
d. Convincing (Meyakinkan) merupakan proses terakhir adalah meyakinkan diri sendiri dan orang lain tentang kebenaran dari solusi atau kesimpulan yang diperoleh. Ini melibatkan pembuktian atau argumen logis yang solid untuk mendukung hipotesis atau generalisasi yang telah dibuat. Meyakinkan juga mencakup klarifikasi dan justifikasi langkah-langkah yang diambil selama proses pemecahan masalah sehingga dapat diterima oleh orang lain.

John Mason mengidentifikasi empat proses utama dalam berpikir matematis, yang dapat membantu seseorang dalam memahami dan memecahkan masalah matematika secara efektif. Keempat proses ini bekerja secara sinergis, memungkinkan seseorang untuk mengembangkan pemahaman matematika yang lebih dalam dan lebih kuat, serta untuk menghadapi masalah dengan pendekatan yang lebih terstruktur dan logis (J Mason 2010). Dimensi struktural-matematis mencakup jenis pemikiran teoritis yang memastikan identifikasi keteraturan dalam pembentukan dan pengembangan objek matematika dan didasarkan pada konsep "struktur matematika". Aktivitas kognitif semacam itu melibatkan skema logis, yang menurutnya struktur matematika dari konten tersebut ditetapkan, analisis struktural-matematis dari materi pendidikan dilakukan sebagai jenis analisis system dan jenis pemikiran struktural-matematis, rangkaian tugas dirumuskan yang meliputi: perumusan konsep matematika; perumusan teorema dan validasi selanjutnya melalui pembuktian; pemodelan matematika dari situasi masalah; pemodelan pendidikan untuk memecahkan masalah umum; penyusunan masalah matematika; memecahkan masalah kompetensi (Semenets, S. P., et al., 2024).

Definisi struktur berpikir matematika menurut para ahli dapat bervariasi, tetapi secara umum, struktur berpikir matematika dapat diartikan sebagai cara berpikir atau pendekatan yang sistematis dalam memahami, merumuskan, dan menyelesaikan masalah matematika. Struktur berpikir matematik melibatkan pemahaman konseptual, keterampilan pemecahan masalah, dan kemampuan untuk menghubungkan konsep matematika dengan situasi dunia nyata secara sistematis dan fleksibel. Struktur matematika, ketika dipahami, menghubungkan konsep-konsep matematika dan membangun pemahaman yang kuat tentang pemikiran matematika yang mendalam, pemikiran struktural dalam proses belajar mengajar akan meningkatkan konten matematika dan pengetahuan pedagogis, terdapat hasil positif dari penggunaan struktur matematika oleh guru yang mendorong siswa untuk berpikir secara struktural (Gronow et al., 2020).

3. Cara Berpikir *Way of Thinking* (WoT) dan Cara Memahami *Way of Understanding* (WoU)

Matematika adalah aktivitas mental manusia yang terkait dengan cara berpikir, menalar, dan memahami struktur abstrak. Hal ini mengarahkan pada pemahaman bahwa matematika adalah proses kognitif yang aktif. Harel berfokus pada sifat matematika yang abstrak dan logis. Ini adalah disiplin yang tidak sekadar mempelajari objek konkret, tetapi mengembangkan pemikiran abstrak yang terstruktur. Pengajaran matematika harus merangsang siswa untuk terlibat dalam eksplorasi dan pemikiran kritis, bukan hanya menerima fakta atau aturan secara pasif. Matematika melalui pendekatan pedagogis, yang berarti bagaimana matematika diajarkan dan dipelajari. Harel menegaskan bahwa matematika harus diajarkan sebagai sesuatu yang hidup dan berkembang, memungkinkan siswa untuk membentuk pemahaman mereka sendiri berdasarkan pengalaman belajar.

Way of Thinking (WoT) adalah konsep yang diperkenalkan oleh (Harel, 2008). Untuk menggambarkan cara berpikir yang digunakan individu dalam memahami dan memecahkan masalah matematika. WoT mencakup karakteristik mental yang mendasari tindakan berpikir dan berinteraksi dengan konsep-konsep matematika

WoT terdiri dari tiga tindakan utama yang saling terkait: mental act, way of thinking, dan way of understanding.

a. Mental Act: Ini adalah tindakan mental yang dilakukan oleh individu saat mereka berusaha memahami atau memecahkan masalah. Tindakan ini mencakup proses kognitif yang terjadi dalam pikiran, seperti analisis, sintesis, dan evaluasi.
b. Way of Thinking: Ini merujuk pada pendekatan atau strategi yang digunakan individu dalam berpikir. Harel menekankan bahwa cara berpikir ini dapat bervariasi antara individu dan dipengaruhi oleh pengalaman serta pengetahuan sebelumnya.
c. Way of Understanding: Ini adalah cara individu memahami konsep-konsep matematika. Harel menunjukkan bahwa pemahaman ini tidak hanya bergantung pada pengetahuan faktual, tetapi juga pada kemampuan untuk menghubungkan konsep-konsep dan menerapkannya dalam konteks yang berbeda.

WoT memiliki beberapa karakteristik penting, antara lain

a. Dualitas: Harel mengemukakan prinsip dualitas, yang menunjukkan bahwa ada dua cara untuk memahami dan berinteraksi dengan konsep matematika. Ini mencakup pemahaman formal dan informal, serta bagaimana kedua pendekatan ini dapat saling melengkapi.
b. Konteks: WoT sangat dipengaruhi oleh konteks di mana individu belajar dan berinteraksi dengan matematika. Lingkungan belajar, pengalaman sebelumnya, dan dukungan sosial dapat memengaruhi cara berpikir siswa.
c. Perkembangan: WoT bukanlah sesuatu yang statis; ia berkembang seiring waktu. Pengalaman belajar yang beragam dapat membantu siswa mengembangkan cara berpikir yang lebih kompleks dan efektif.

Konsep *Way of Understanding* (WoU) sebagai bagian dari teorinya tentang cara berpikir dalam matematika. Berikut adalah langkah-langkah yang diidentifikasi dalam proses pemahaman menurut Harel:

a. Menghubungkan Konsep: Langkah pertama dalam WoU adalah menghubungkan konsep-konsep matematika yang sudah diketahui dengan konsep baru yang sedang dipelajari. Ini membantu siswa untuk melihat hubungan antara berbagai ide dan memperkuat pemahaman mereka.
b. Interpretasi Konsep: Siswa perlu menginterpretasikan konsep yang diajarkan dengan cara yang bermakna bagi mereka. Ini melibatkan pemahaman tentang apa arti konsep

tersebut dalam konteks yang lebih luas dan bagaimana ia dapat diterapkan dalam situasi nyata.

c. Penerapan dalam Pemecahan Masalah: Setelah memahami konsep, siswa harus dapat menerapkannya dalam pemecahan masalah. Ini mencakup penggunaan strategi yang tepat untuk menyelesaikan masalah matematika yang relevan.
d. Refleksi dan Evaluasi: Langkah selanjutnya adalah refleksi terhadap proses pemecahan masalah yang telah dilakukan. Siswa perlu mengevaluasi apakah pendekatan yang digunakan efektif dan bagaimana mereka dapat memperbaiki pemahaman mereka di masa depan.
e. Pengembangan Pemahaman yang Lebih Dalam: Proses pemahaman tidak berhenti pada satu masalah saja. Siswa didorong untuk terus mengembangkan pemahaman mereka dengan mengeksplorasi lebih banyak masalah dan konsep, serta berinteraksi dengan teman sebaya dan guru untuk mendapatkan perspektif yang berbeda.

Harel menekankan bahwa pemahaman matematika adalah proses yang dinamis dan berkembang, di mana siswa harus aktif terlibat dalam belajar dan berpikir kritis. Dengan mengikuti langkah-langkah ini, siswa dapat membangun pemahaman yang lebih kuat dan mendalam tentang konsep-konsep matematika. Tiga kegiatan utama dalam aktivitas matematika yang mencerminkan proses berpikir adalah menafsirkan, memecahkan masalah, dan membuktikan. Ketiga kegiatan ini melibatkan aktivitas mental yang mendalam dan penting dalam memahami serta menerapkan konsep-konsep matematika. Menafsirkan adalah tahap awal dalam memahami matematika yang melibatkan pemahaman terhadap objek atau konsep, menafsirkan berarti memahami makna dari suatu konsep, objek, atau situasi matematika. Menafsirkan melibatkan kemampuan untuk mengaitkan representasi abstrak matematika dengan makna yang lebih dalam, baik secara konsep maupun aplikasi memecahkan masalah adalah kegiatan eksploratif yang melibatkan pencarian solusi dengan menggunakan kemampuan berpikir kritis, memecahkan masalah adalah aspek yang sentral dalam matematika, yang menurut Harel, merupakan kegiatan berpikir yang melibatkan penyelidikan dan eksplorasi dan membuktikan adalah proses deduktif yang menunjukkan kebenaran suatu konsep melalui argumen logis yang valid. Pendekatan pemecahan masalah adalah contoh cara berpikir yang terkait dengan tindakan pemecahan masalah, skema pembuktian adalah cara berpikir yang terkait dengan tindakan pembuktian

4. Framework (*Connections, Recognising patterns, Identifying similarities and differences, and Generalising and reasoning*) CRIG

Koneksi (*Connections*) menghubungkan konteks atau konsep dengan pengetahuan sebelumnya memungkinkan terjadinya proses informal dalam memahami suatu situasi.

Membuat hubungan dengan pembelajaran matematika sebelumnya merupakan komponen struktur yang mendukung penalaran siswa pemahaman matematika. Proses menghubungkan konsep matematika yang berbeda untuk memahami bagaimana mereka berinteraksi satu sama lain. Dalam matematika, banyak konsep saling terkait, dan memahami hubungan antara mereka sangat penting untuk pemahaman yang mendalam. Misalnya, proses ini mencakup menghubungkan konsep pecahan dengan desimal atau persamaan dengan grafik. Untuk menunjukkan koneksi antara konsep-konsep yang berbeda, siswa dapat melihat bagaimana aljabar dan geometri saling berhubungan, konsep persamaan linear dapat dihubungkan dengan representasi grafis dalam geometri, dengan menekankan pada koneksi antara aljabar dan geometri, buku ini membantu siswa mengembangkan pemahaman yang lebih mendalam tentang bagaimana kedua bidang ini berinteraksi, yang sangat penting untuk pembelajaran matematika yang efektif selain itu dapat membantu siswa memahami konsep-konsep dasar, tetapi juga mempersiapkan mereka untuk tantangan yang lebih kompleks di masa depan (Gardella & Aguirre, 2006).

Pengenalan pola dalam matematika adalah kemampuan untuk mengidentifikasi dan memahami urutan atau struktur yang berulang dalam angka atau bentuk. Mengenali pola (*Recognising patterns*) mengidentifikasi pentingnya pola, kesadaran akan pola, dan mereproduksi pola sebagai hal yang penting untuk pengembangan matematika. Pola adalah inti dari banyak konsep matematika, dan kemampuan untuk mengidentifikasi urutan, aturan, atau pengulangan dalam data atau dalam berbagai bentuk representasi matematika dikenal sebagai pengakuan pola. Memahami pola aritmatika atau geometrik dalam urutan angka adalah penting untuk memahami konsep yang lebih kompleks.

Identifikasi persamaan dan perbedaan (*Identifying similarities and differences*) terutama didasarkan pada pemilahan dan pengklasifikasian objek ke dalam kategori suka atau tidak suka. Kesetaraan, sebagai gagasan kesamaan yang berbeda, bisa juga berkembang melalui pengalaman dan meluas ke perbedaan yang lebih halus dalam matematika representasi (Gronow et al., 2020). Mengidentifikasi kesamaan dan perbedaan adalah proses analitis yang melibatkan membandingkan berbagai konsep, masalah, atau solusi untuk menemukan elemen yang serupa atau berbeda. Proses ini membantu dalam memahami apa yang membuat satu konsep unik atau bagaimana dua konsep dapat berhubungan satu sama lain. Proses ini juga membantu dalam mengklasifikasikan dan mengkategorikan konsep berdasarkan ciri-ciri mereka, yang merupakan dasar generalisasi.

Generalisasi adalah langkah terakhir di mana pola, kesamaan, dan perbedaan yang ditemukan digunakan untuk membuat aturan atau prinsip umum yang dapat diterapkan dalam berbagai situasi. Proses ini memperluas pemahaman spesifik untuk mencakup konteks yang lebih luas, dan membantu mengembangkan pemikiran matematis yang fleksibel dan adaptif. Matematika awal mencakup pengambilan keputusan tentang persamaan dan perbedaan apakah semuanya sama atau tidak, lebih besar atau lebih kecil dan bagaimana caranya mengenali perbedaan-perbedaan ini. Mengidentifikasi persamaan dan perbedaan pada dasarnya didasarkan pada menyortir dan mengklasifikasikan objek ke dalam kategori serupa atau tidak serupa. Generalisasi dan penalaran (*Generalising and reasoning*) dari semua komponen kerangka CRIG, kombinasi generalisasi dan penalaran adalah yang paling universal. Setiap tahap saling bergantung dan mempengaruhi, menciptakan siklus pembelajaran yang memperkuat pemahaman matematika dari pemikiran konkret menuju abstraksi yang lebih tinggi. Diagram ini menunjukkan bagaimana masing-masing komponen berinteraksi untuk membantu seseorang mengembangkan keterampilan berpikir matematis yang lebih mendalam dan terstruktur.

Penelitian terkait kemampuan berpikir struktur, membuktikan, menggunakan aplikasi telah banyak dilakukan. Ada tiga penyebab kegagalan konstruksi pembuktian. Kegagalan konstruksi pembuktian terjadi karena (1) Skema asimilasi tidak lengkap, (2) Skema proses akomodasi tidak lengkap, (3) Skema lengkap namun tidak berkaitan dengan proses asimilasi dan akomodasi (S. N. S. Netti et al., 2017). Hasil penelitian Al Jupri pada guru sekolah dasar dalam berpikir deduktif seperti melakukan pembuktian geometri merupakan permasalahan yang sangat diperlukan untuk diatasi, meskipun separuh guru menunjukkan kemampuan dalam melakukan pembuktian formal, namun sisanya memberikan pembuktian yang tidak tepat (Jupri, 2018). Fakta lainnya strategi grafik menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan nilai absolut, secara visual mudah dan lebih bermakna. Namun, dalam praktiknya sulit diimplementasikan jika fungsi nilai absolut relatif kompleks sehingga sulit digambarkan dengan tangan tanpa bantuan software grafik. Mungkin, untuk penelitian di masa depan, ada baiknya menyelidiki peran penggunaan perangkat lunak grafik (Jupri et al., 2022). Berikut ini disajikan soal mata kuliah analisis real yang dikaitkan dengan kemampuan geometri, untuk mengkaji tahapan mana pada CRIG yang sudah dipahami dengan baik dan untuk mengetahui respon mahasiswa terhadap materi, dan model pembelajaran yang dilaksanakan pada analisis real.

Tabel 1. Contoh Soal yang Mengikuti Framework CRIG

Tahapan	Framework CRIG	Contoh
1.	Koneksi (*Connections*)	$f(x) := \dfrac{x^2+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$ 1. Tentukan $\lim_{x\to 1} f(x)$ 2. Gambarkan $f(x) := \frac{x^2+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Berikan penjelasan berdasarkan gambar yang diperoleh dengan $\lim_{x\to 1} f(x)$

2	Mengenali pola (Recognition Patern)	Diketahui $a_1 = \sqrt{2}$; $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + a_n}}$, $\forall n \geq 1$. 1. Apakah barisan a_n terbatas dan monoton? 2. Jika ya, buktikan !
3	Identifikasi persamaan dan perbedaan (*Identifying similarities and differences*)	Buktikan bahwa $\lim_{n \to \infty} x^n = 0, jika\ \|x\| < 1$
4	Generalisasi dan penalaran (*Generalising and reasoning*	Buktikan bahwa a. $x_n := \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ Barisan Cauchy !

D. Simpulan

Keterkaitan antara struktur matematika, struktur berpikir matematika, *way of thinking*, dan *way of understanding* menciptakan ekosistem pembelajaran yang dinamis. Struktur matematika menyediakan fondasi yang diperlukan untuk berpikir secara sistematis. Struktur matematika merujuk pada cara sistematis di mana konsep-konsep matematika diorganisir dan saling berhubungan. Sementara cara berpikir yang efektif memperkaya pemahaman individu terhadap konsep-konsep matematika. *Framework* Struktur berpikir *connections* menekankan pentingnya menghubungkan atau memahami berbagai konsep matematika, sehingga untuk memahami materi matematika yang saling berkaitan perlu dipahami atau mengenal materi sebelumnya. Pada *recognising patterns* mengajarkan siswa untuk mengidentifikasi pola dalam data atau situasi matematika. *Identifying similarities and differences*, mendorong siswa untuk membandingkan dan menganalisis berbagai konsep atau objek matematika, dengan memahami kesamaan dan perbedaan dari suatu fungsi atau persamaan siswa akan mampu mengeneralisasi berdasarkan premis yang ada, dan *generalising and reasoning*, mengembangkan kemampuan siswa untuk menarik kesimpulan dari contoh spesifik dan menerapkannya pada situasi yang lebih luas. Dengan demikian, pengembangan kemampuan berpikir dan memahami struktur matematika sangat penting dalam pendidikan matematika.

Referensi

Andal, S. G. B., & Andrade, R. R. (2022). Exploring Students' Procedural Fluency and Written Adaptive Reasoning Skills In Solving Open-Ended Problems. *International Journal of Science, Technology, Engineering and Mathematics*, *2*(1), 1–25.

Bucklin, B. A., Asdigian, N. L., Hawkins, J. L., & Klein, U. (2021). Making it stick: use of active learning strategies in continuing medical education. *BMC Medical Education*, *21*, 1–9.

Dvureĕenskij, A. (2002). Measures on quantum structures. In *Handbook of measure theory* (pp. 827–868). Elsevier.

Ernest, P., Skovsmose, O., Van Bendegem, J. P., Bicudo, M., Miarka, R., Kvasz, L., & Moeller, R. (2016). *The philosophy of mathematics education*. Springer Nature.

Gardella, F. J., & Aguirre, A. C. (2006). Mathematical connections: A bridge to algebra and

geometry. In *McDougal Littell/Houghton Mifflin*. McDougal Littell/Houghton Mifflin.
Gronow, M., Mulligan, J., & Cavanagh, M. (2020). Teachers' understanding and use of mathematical structure. *Mathematics Education Research Journal*, 1–26.
Gronow, M., Mulligan, J., & Cavanagh, M. (2022). Teachers' understanding and use of mathematical structure. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(2), 215–240.
Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, 265–290.
Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Dung, J.-J., & Yang, Y.-L. (2007). Multiple representation skills and creativity effects on mathematical problem solving using a multimedia whiteboard system. *Journal of Educational Technology & Society*, *10*(2), 191–212.
Jupri, A. (2018). Using the Van Hiele theory to analyze primary school teachers' written work on geometrical proof problems. *Journal of Physics: Conference Series*, *1013*(1), 12117.
Jupri, A., Usdiyana, D., & Gozali, S. M. (2022). Pre-Service Teachers' Strategies in Solving Absolute Value Equations and Inequalities. *Education Sciences*, *12*(11), 743.
Kilpatrick, J. (2020). History of research in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 349–354.
Kilpatrick, J., & Swafford, J. (2002). *Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Pearson Education Limited Edinburgh Gate Harlow Essex CM20 2JE England.
Mason, J. (2003). On the structure of attention in the learning of mathematics. *Australian Mathematics Teacher, The*, *59*(4), 17–25.
Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10–32.
Netti, S. N. S., Sutawdjaja, A., Subanji, S., & Mulyati, S. (2017). Skema Berpikir Mahasiswa Ketika Mengostruksi Bukti Matematis. *Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika Dan Nilai-Nilai Islami)*, *1*(1), 547–555.
Netti, S., Nusantara, T., Subanji, S., Abadyo, A., & Anwar, L. (2016). The Failure to Construct Proof Based on Assimilation and Accommodation Framework from Piaget. *International Education Studies*, *9*(12), 12–22.
Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (Expanden P, Vol. 85). Princeton university press.
Ramírez-Montoya, M. S., Andrade-Vargas, L., Rivera-Rogel, D., & Portuguez-Castro, M. (2021). Trends for the future of education programs for professional development. *Sustainability*, *13*(13), 7244.
Richland, L. E., Stigler, J. W., & Holyoak, K. J. (2012). Teaching the conceptual structure of mathematics. *Educational Psychologist*, *47*(3), 189–203.
Schoenfeld, A. H., & Sloane, A. H. (2016). *Mathematical thinking and problem solving*. Routledge
Semenets, S. P., Semenets, L. M., Snikhovska, I. E., & Holovnia, R. M. (2024, October). Structural-mathematical thinking and its development in teaching Mathematics. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2871, No. 1, p. 012003). IOP Publishing..
Senechal, M. (1993). Mathematical structures. *Science (New York, NY)*, *260*(5111), 1170–1173.
Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. *Progress Report of the APEC Project: Collaborative Studies on Innovations for Teaching and Learning Mathematics in Different Cultures (II)—Lesson Study Focusing on Mathematical Thinking*.

Subanji, S. (2016). Teori defragmentasi struktur berpikir dalam mengonstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika. In *Universitas Negeri Malang*. UM Press.

Sukmaangara, B., & Pabrawati, M. N. (2019). Analisis struktur berpikir peserta didik dalam menyelesaikan masalah tes kemampuan berpikir kritis matematik berdasarkan dominasi otak. *Prosiding Seminar Nasional & Call For Papers*.

Susanah. (2014). Matematika dan pendidikan matematika. In *Strategi pembelajaran matematika*. Universitas Terbuka.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Wahab, A., Ahsan, M., & Busrah, Z. (2022). Defragmenting the Thinking Structure of Problem Solving Through Cognitive Mapping Based on Polya Theory on Pisa Problems. *Journal of Mathematics Learning Innovation (JMLI)*, *1*(1), 93–97.

Walker, A. L. (2021). An Analysis on Problem Solving ability of Higher Secondary School Students and Problem Solving Through Teaching. *Academy of Educational Leadership Journal*, *25*, 1–2.

Wynants, S., & Dennis, J. (2018). Professional development in an online context: Opportunities and challenges from the voices of college faculty. *Journal of Educators Online*, *15*(1), n1.